z-Transformation von Messwerten (1)

- Die Verwendung der Standardabweichung zur Standardisierung von Messwerten I -

- Will man wissen, ob ein Messwert relativ zu seiner Verteilung als hoch oder niedrig einzustufen ist, kann man angeben, wie viele Standardabweichungen der Messwert über oder unter dem Durchschnitt liegt.
- Will man zwei Messwerte miteinander vergleichen, die aus verschiedenen Stichproben stammen (z.B. die Abitursleistung in unterschiedlichen Ländern), so sollte man zunächst die Abweichung zum Durchschnitt der jeweiligen Stichprobe betrachten und diesen an der Unterschiedlichkeit (Variabilität) in der jeweiligen Stichprobe relativieren.

Eine solche Transformation von Messwerten heißt z-Standardisierung, die transformierten Messwerte heißen z-Werte (z_i)

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$$

z-Transformation von Messwerten (2)

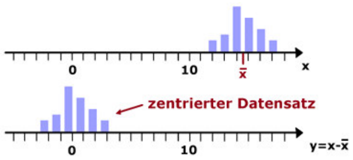
- Die Verwendung der Standardabweichung zur Standardisierung von Messwerten II -

- Ein z_i-Wert ist ein standardisierter Messwert und gibt an, wie viele Standardabweichungen und in welcher Richtung (Vorzeichen!) ein Messwert x_i in einer Stichprobe vom Mittelwert abweicht.
- Durch diese Transformation werden Werte aus Verteilungen mit unterschiedlichen Mittelwerten und Streuungen in Bezug auf ihre relative Abweichung vom Mittelwert vergleichbar gemacht.
- Durch die z-Transformation wird die Form der Verteilung nicht verändert.

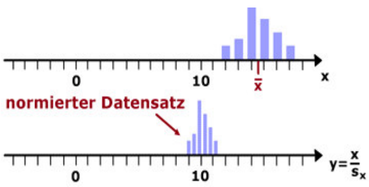
z-Transformation von Messwerten (3)

- Grafische Darstellung der z-Transfomation-

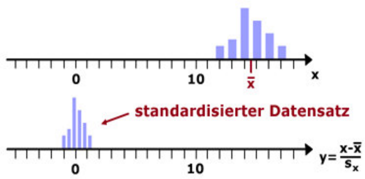
Zentrierung: Subtraktion des AM



Normierung: Division durch s



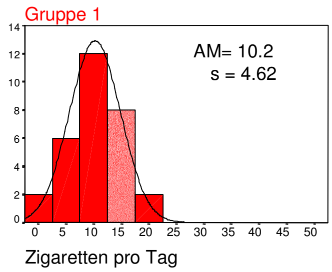
Standardisierung: Subtraktion des AM und Division durch s. Werte aus verschiedenen Verteilungen lassen sich so vergleichen.

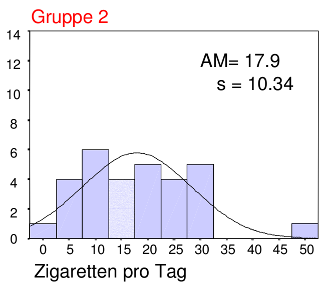


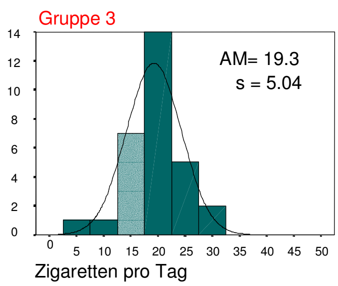
z-Transformation von Messwerten (4)

- Beispiel -

Bei Jugendlichen ist Rauchen auch ein Gruppenphänomen. Aus drei Berufsschulklassen wird je ein Schüler (Schüler A, B und C) nach dem täglichen Zigarettenkonsum gefragt. Alle drei sagen, sie rauchen 15 Zigaretten am Tag. Wie sind diese Angaben zu bewerten, wenn man die unterschiedlichen Gruppenverhältnisse mit einbeziehen möchte?







z-Transformation von Messwerten (5)

- Einsetzen der Beispielmesswerte $x_A = x_B = x_C = 15$ Zigaretten -

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$$

$$z_A = \frac{x_A - \bar{x}_{Gr1}}{s_{Gr1}} = \frac{15 - 10.2}{4.62} \cong 1.03$$

$$z_B = \frac{x_B - \bar{x}_{Gr2}}{s_{Gr2}} = \frac{15 - 17.9}{10.39} \cong -0.28$$

$$z_C = \frac{x_C - \bar{x}_{Gr3}}{s_{Gr3}} = \frac{15 - 19.3}{5.04} \cong -0.85$$

Gr=Gruppe

Fazit: Die drei Schüler rauchen zwar pro Tag gleich viele Zigaretten, relativiert am durchschnittlichen Konsum ihrer Bezugsgruppe raucht Schüler A aber überdurchschnittlich und damit relativ mehr als B und C, die beide im Vergleich zu ihrer Gruppe unterdurchschnittlich viel rauchen (negative z-Werte!).
Schüler C und B rauchen zwar verglichen zum Durchschnittsniveau ihrer jeweiligen Klasse weniger, in der Klasse von C rauchen jedoch nur wenige Schüler noch weniger als er, während in B*s* Klasse mehrere Mitschüler noch weniger rauchen. Die geringere Streuung (Standardabweichung) der Messwerte in C*s* Klasse bewirkt, dass im relativen Vergleich C*s* 15 Zigaretten eine „extremere" Abweichung vom Klassenmittel darstellen als B*s* 15 Zigaretten. Deshalb errechnet sich für C der vergleichsweise kleinere *z*-Wert als für B.

z-Transformation von Messwerten (6)

- Mittelwert und Standardabweichung z-transformierter Werte -

z-standardisierte Werte weisen immer einen Durchschnittswert von Null $(\bar{z} = 0)$ und eine Varianz bzw. Standardabweichung von eins auf (s^2_z=1 bzw. s_z=1).

Herleitung

z-Transformationen können als Lineartransformationen begriffen werden mit $\frac{1}{s_x}$ als multiplikative und $-\frac{\bar{x}}{s_x}$ als additive Konstante.

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} = \frac{x_i}{s_x} - \frac{\bar{x}}{s_x} = \frac{1}{s_x} \cdot x_i - \frac{\bar{x}}{s_x}$$

a) Das arithmetische Mittel macht lineare Transformationen folgendermaßen mit: $\bar{y} = b \cdot \bar{x} + a$

$$\bar{z} = \frac{1}{s_x} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{x}}{s_x} = \frac{\bar{x}}{s_x} - \frac{\bar{x}}{s_x} = 0$$

b) Für die Varianz einer linear transformierten Variable gilt: $s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2$

$$z_i = \frac{1}{s_x} \cdot x_i - \frac{\bar{x}}{s_x} \quad \Rightarrow \quad s_z^2 = \left(\frac{1}{s_x}\right)^2 \cdot s_x^2 = \frac{s_x^2}{s_x^2} = 1$$