Wahrscheinlichkeitssätze (1)

- Ableitungen aus den Axiomen nach Kolmogorow -

1. ***Theorem über komplementäre Ereignisse***
   Die Vereinigung von (A) und (¬A) führt zu einem sicheren Ereignis.

$$p(A \cup \neg A) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(\neg A) = 1 - p(A)$$

[Negation]

2. ***Theorem über das unmögliche Ereignis***
   Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ∅ ist 0.

$$p(\varnothing) = 0$$

Wahrscheinlichkeitssätze (2)

- Der einfache Additionssatz -

Für zwei unvereinbare (disjunkte) Ereignisse gilt:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Schließen sich zwei Ereignisse gegenseitig aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder das Ereignis A ***oder*** das Ereignis B auftritt, gleich der Summe der Einzel- oder Randwahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

Für mehrere disjunkte Ereignisse gilt:

$$p(A \cup B \cup C \cup \ldots) = p(A) + p(B) + p(C) + \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eines von k disjunkten Ereignissen eintritt, entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die k Ereignisse.

Beispiel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Würfelwurf entweder eine 6 ***oder*** eine 1 zu würfeln?

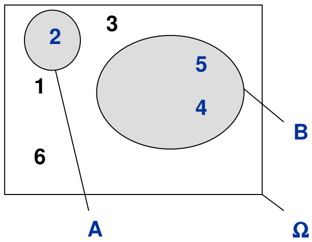
$p(6)=1/6$
$p(1)=1/6$
$p(6 \cup 1)=1/6 + 1/6=2/6$

Wahrscheinlichkeitssätze (3)

- Additionssätze -

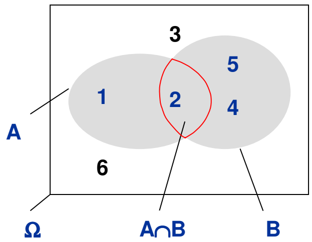
Venn-Diagramm: Veranschaulichung

A und B sind unvereinbar (sind disjunkt)



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

A und B sind vereinbar (sind nicht disjunkt).



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Wahrscheinlichkeitssätze (4)

- Der erweiterte Additionssatz -

Für vereinbare (nicht disjunkte) Ereignisse gilt:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zufallsexperiment mindestens eines der Ereignisse A oder B eintritt ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für A und B abzüglich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass A und B beide eintreten.

Beispiel:
Wie groß ist die Wkt. aus einem Skatkartenspiel bei einmaligem Ziehen eine Herzkarte (H) ***oder*** eine Bildkarte (B) zu ziehen?

$p(H)=8/32$
$p(B)=12/32$
$p(H \cap B)=3/32$
$p(H \cup B)=8/32 + 12/32 - 3/32=17/32$

Wahrscheinlichkeitssätze (5)

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten I -

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen ***stochastisch unabhängig***, wenn die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unabhängig von den Bedingungen über das Ereignis B ist, wenn also gilt:

$$p(A/B) = p(A/\neg B)$$
$$p(A/B) = p(A)$$

bzw.

$$p(B/A) = p(B/\neg A)$$
$$p(B/A) = p(B)$$

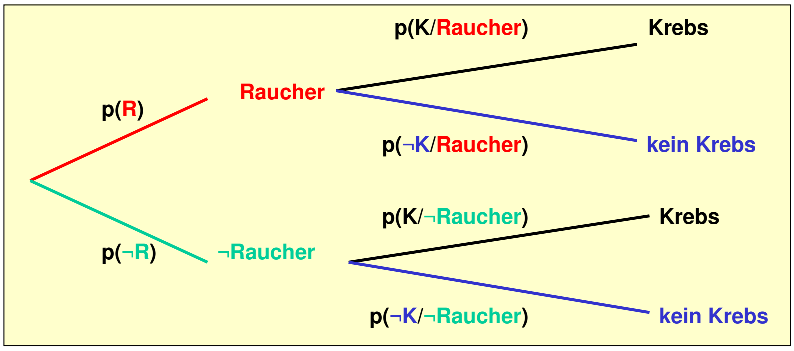
p(A/B) bezeichnet die Wahrscheinlichkeit von A, wenn B bereits eingetreten ist. Die Vorhersagbarkeit von Ereignis A wird durch das Eintreten von B nicht beeinflusst.

Wahrscheinlichkeitssätze (6)

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten II -

Baumdiagramm: Veranschaulichung

Ereignisse: **Raucher** (R) und **Lungenkrebs** (K)



Unabhängigkeit liegt vor, wenn: ***P***(**Krebs**) **=** ***P***(**K**/**Raucher**) **=** ***P***(**K**/**¬Raucher**)

Abhängigkeit liegt vor wenn: ***P***(**K**/**Raucher**) **≠** ***P***(**K**/**¬Raucher**)

Wahrscheinlichkeitssätze (7)

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten III -

Verbund- und Randwahrscheinlichkeiten

beobachtete Daten

	Krebs	kein Krebs	
Raucher	50	30	80
Nichtraucher	40	80	120
	90	110	200

beobachtete relative Häufigkeiten

Verbundwahrscheinlichkeit

Randwahrscheinlichkeit

	Krebs	kein Krebs	
Raucher	0.25	0.15	0.4
Nichtraucher	0.2	0.4	0.6
	0.45	0.55	1.00

Wahrscheinlichkeitssätze (8)

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten IV -

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

p(A/B) ist die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass Ereignis B auftritt (*P*(B)>0); „bedingte Wahrscheinlichkeit von A ***gegeben*** B“

$$p(A/B) = \frac{\textbf{Verbundwahrscheinlichkeit}}{\textbf{(Rand-)Wahrscheinlichkeit der Bedingung}}$$

$$p(A/B) = \frac{f_{A\cap B}}{f_B}$$

$$p(A/B) = \frac{f_{A\cap B}/n}{f_B/n}$$

$$p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

bzw.

$$p(B/A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

Beispiel:

Wie groß ist die Wkt. aus einem Kartenspiel ein As (A) zu ziehen unter der Voraussetzung, dass es eine Herzkarte (B) ist?

P(B)=8/32

P(A∩B)=1/32

P(A/B)=1/32 : 8/32= 1/8

Wahrscheinlichkeitssätze (9)

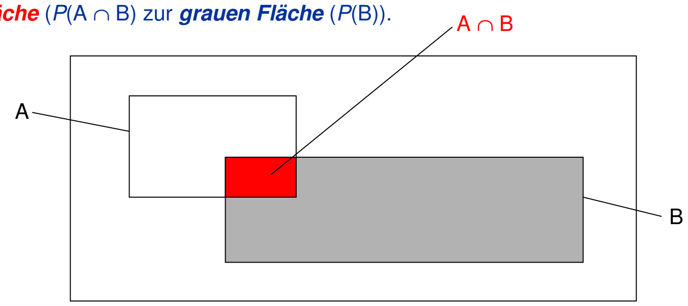
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten V -

Venn-Diagramm: Veranschaulichung

Ist B eingetreten, so ist die Menge der ***möglichen*** Ereignisse gleich der Menge der ***Elemente, die in B liegen***;

die Menge der ***günstigen*** Ereignisse ist gleich der Menge der ***Elemente von A, die in B liegen*** (Schnittmenge).

Die bedingte Wahrscheinlichkeit *P*(A/B) entspricht dem Verhältnis der ***roten Fläche*** (*P*(A ∩ B) zur ***grauen Fläche*** (*P*(B)).



Wahrscheinlichkeitssätze (10)

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten VI -

Beispiel

beobachtete relative Häufigkeiten

	Krebs	kein Krebs	
Raucher	0.25	0.15	0.40
Nichtraucher	0.20	0.40	0.60
	0.45	0.55	1.00

P(K / R)= *P*(K ∩ R) / *P*(R) =.25/.40 =0.625

P(K /¬R)= *P*(K ∩ ¬R) / *P*(¬R)=.20/.60 =0.333

→ Merkmale stochastisch abhängig

P(R /K)= *P*(R ∩ K) / *P*(K) =.25/.45 =0.556

P(R/¬K)= *P*(R ∩ ¬K) / *P*(¬K)=.15/.55 =0.273

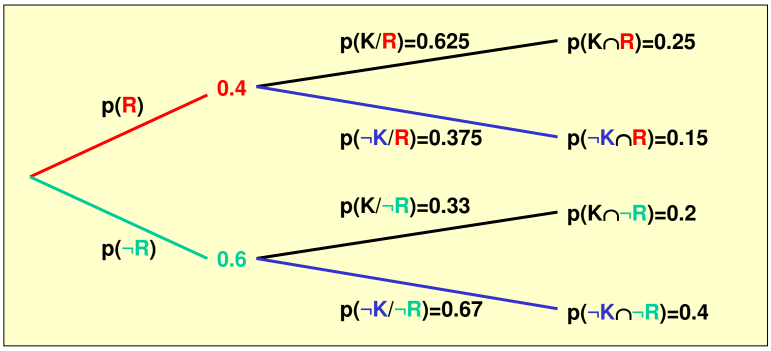
Merke:
P(A / B) ≠ P(B / A)
[außer bei Gleichverteilungen]

Wahrscheinlichkeitssätze (11)

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten VII -

Baumdiagramm: Zahlenbeispiel

Ereignisse: Raucher (R) und Lungenkrebs (K)



Merke: $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \longrightarrow p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$

Wahrscheinlichkeitssätze (12)

- Der Multiplikationssatz -

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse beide auftreten ist gleich dem Produkt der Randwahrscheinlichkeit des einen multipliziert mit der bedingten Wahrscheinlichkeit des anderen (gegeben das erste liegt vor).

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$
$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$$

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,. aus einem Kartenspiel sowohl eine rote Karte (A) als auch ein As (B) zu ziehen?

P(A)=16/32

P(B/A)=2/16

P(A∩B)=16/32 · 2/16 = 1/16

Wahrscheinlichkeitssätze (13)

- Der Multiplikationssatz bei stochastischer Unabhängigkeit -

Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so gilt:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Bei vollständiger Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse ergibt sich:

$$p(A \cap B \cap C \cap ...) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \cdot ...$$

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal nacheinander (A ***und*** B) eine 6 zu würfeln?

P(A)=1/6
P(B)=1/6
P(A∩B)=1/6 · 1/6=1/36

Wahrscheinlichkeitssätze (14)

- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit -

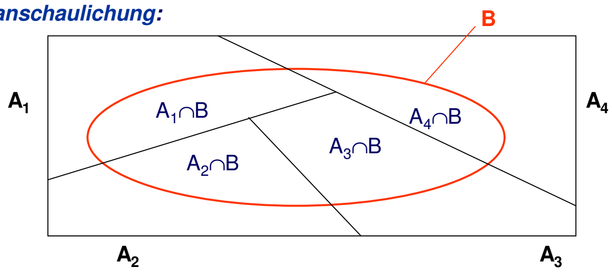
Wenn ein Ereignis B immer gleichzeitig mit einem von *k* ***einander ausschließenden*** Ereignissen A_i (i=1...*k*) eintritt, gilt für die Wahrscheinlichkeit von B:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{k} p(A_i) \cdot p(B / A_i)$$

bzw.

$$p(B) = p(B / A) \cdot p(A) + p(B / \neg A) \cdot p(\neg A)$$

Veranschaulichung:



Wahrscheinlichkeitssätze (15)

- Das Bayes Theorem I -

Mit Hilfe des Bayes Theorems lässt sich ein unbekannte bedingte Wahrscheinlichkeit aus der anderen bedingten Wahrscheinlichkeit und den Randwahrscheinlichkeiten berechnen.

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B)} = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B/A) \cdot p(A) + p(B/\neg A) \cdot p(\neg A)}$$

bzw.

$$p(B/A) = \frac{p(A/B) \cdot p(B)}{p(A)} = \frac{p(A/B) \cdot p(B)}{p(A/B) \cdot p(B) + p(A/\neg B) \cdot p(\neg B)}$$

Zentrale Frage des Signifikanztests:
Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten empirische Daten auf, unter der Bedingung, dass eine bestimmte Hypothese gilt **P(D/H)**? Dies ist i.A. ***ungleich*** der Wahrscheinlichkeit mit der (gegeben die Daten) eine bestimmte Hypothese gilt (**P(H/D)**) (***häufige Fehlinterpretation!***).

Wahrscheinlichkeitssätze (16)

- Das Bayes Theorem II -

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem positiven HIV-Testergebnis (T+) wirklich infiziert zu sein (HIV+)?
(Daten aus: Gigerenzer, G., Hoffrage, U. & Ebert, A. (1998), *AIDS Care*, *10*(2), 197-211.)

P(HIV+) = 0.0001 (***Prävalenz***)
P(T+/HIV+) = 0.998 (***Sensitivität*** des Tests)
komplementär dazu: ***falsch negativ*** (T-/HIV+): 1-Sensitivität
P(T-/HIV-) = 0.9999 (***Spezifität*** des Tests)
komplementät dazu: ***falsch positiv*** (T+/HIV-): 1-Spezifität

Bedingte Wahrscheinlichkeit:
p(HIV+/T+) = p(T+/HIV+) · p(HIV+) / p(T+)
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:
p(T+) = p(HIV+ ∩ T+) + p(HIV- ∩ T+) = p(T+/HIV+) · p(HIV+) + p(T+/HIV-) · p(HIV-)
Ergebnis:
p(HIV+/T+)=0.998 · 0.0001 / (0.998 · 0.0001 + 0.0001 · 0.9999) = 0.4995

Wahrscheinlichkeitssätze (17)

- Das Bayes Theorem III -

Beispiel mit bedingten Wahrscheinlichkeiten*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Ultraschall (U+) ein Kind mit Down-Syndrom zu bekommen (D+), wenn

p(Ultra+/Down+) = 0.80 ***Sensitivität***
p(Ultra+/Down–) = 0.08 ***Falsch Positiv*** ***Wie groß ist P(Down+ / Ultra+)?***
p(Down+) = 0.0015 ***Prävalenz***

p(D+)=0.0015	p(U+/D+)=0.80	p(D+∩U+)=0.0015 · 0.80	= 0.0012
	p(U–/D+)=0.20	p(D+∩U–)=0.0015 · 0.20	= 0.0003
p(D–)=0.9985	p(U+/D–)=0.08	p(D–∩U+)=0.9985 · 0.08	= 0.07988
	p(U–/D–)=0.92	p(D–∩U–)=0.9985 · 0.92	= 0.91862

P(D+/U+)=P(D+ ∩ U+)/(P(D+ ∩ U+)+P(D– ∩ U+))
=0.0012 / (0.0012+0.07988)=0.0148

Die Wahrscheinlichkeit bei einem positiven Ultraschall ein Kind mit Down-Syndrom zu bekommen beträgt 1.5%.

* Daten aus: Kurzenhäuser, S. & Hoffrage, U., (2002). *Medical Teacher*, 24 (5), 516-521.

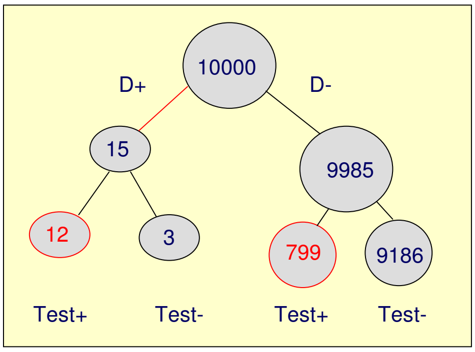
Wahrscheinlichkeitssätze (18)

- Das Bayes Theorem IV -

Beispiel mit absoluten Häufigkeiten

15 von 10.000 schwangeren Frauen bekommen ein Kind mit Down-Syndrom. Von diesen 15 Frauen, bekommen 12 ein positives Ultraschallergebnis. Von den 9985 Schwangeren mit Kindern ohne Down-Syndrom, bekommen 799 ein positives Ultraschallergebnis.

Wie viele der Frauen mit einem positiven Ultraschallergebnis werden ein Kind mit Down-Syndrom bekommen?



P(D+/T+) = 12 /(12 + 799)
= 0.01480

Die Wahrscheinlichkeit bei einem positiven Ultraschall ein Kind mit Down-Syndrom zu bekommen beträgt 1.5%.