Kombinatorik (1)

- Einführung -

Um für ein Zufallsexperiment mit gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen die Wahrscheinlichkeit für ein beliebiges Ereignis A nach der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition zu berechnen, muss man

a) die Menge der möglichen Elementarereignisse kennen und
b) die Zahl der Elementarereignisse feststellen, die zur Teilmenge A (günstiges Ereignis) gehören.

Die Kombinatorik stellt Rechenregeln bereit, um die Menge der Ereignisse, die möglich sind (und damit auch die Menge der Ereignisse, die zufällig auftreten können), bestimmen zu können.

Im Wesentlichen werden mit der Kombinatorik zwei Fragen beantwortet:

1. Auf wie viele Arten kann eine bestimmte Anzahl von Objekten angeordnet werden?
2. Wie viele Teilmengen eines bestimmten Umfangs ***r*** können aus einer gegebenen Menge ***N*** gebildet werden.

Kombinatorik (2)

- Permutationen I -

Permutationen

Frage:

Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine bestimmte Zahl (*N*) von Elementen, die alle voneinander verschieden sind, in eine Reihenfolge zu bringen?

$N! = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (*lies: N Fakultät = ...*)

N! ist gleich dem Produkt der ganzzahligen Zahlen von 1 bis *N*.*)

Die Zahl der Möglichkeiten, *N* verschiedene Elemente in eine Reihenfolge zu bringen, ist gleich *N*!.
Jede dieser Reihenfolgen wird auch als Permutation bezeichnet.
Die Zahl der möglichen Permutationen von *N* Elementen ist demnach *N*!.

Zusatzdefinition: 0!=1.

*) In R lässt sich *N*! mit der Funktion `factorial(N)` berechnen, siehe: http://www.r-project.org/

Kombinatorik (3)

- Permutationen II -

Permutationen - Beispiel

Forschungsinteresse: Zusammenhang zwischen Intelligenztestergebnissen und Lehrerurteil über die Intelligenz der Schüler

Untersuchung: Fünf Schüler werden mit einem Intelligenztest getestet und von ihrer Lehrerin in eine Rangfolge hinsichtlich ihrer Intelligenz gebracht.

Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass die Lehrerin per Zufall die den Intelligenztestwerten entsprechende Rangfolge erstellt?

Vorgehen:

Bestimmen der *möglichen* Rangfolgen, um die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Rangfolge berechnen zu können.

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

$\longrightarrow$ p(*eine bestimmte Rangfolge*)=1/120.

Wahrscheinlichkeit, dass die Rangfolge der Lehrerin mit der entsprechenden des Intelligenztestes übereinstimmt beträgt 1/120.

Ist das noch mit dem Zufall zu vereinbaren?

Kombinatorik (4)

- Permutationen III -

Teilsequenzen mit Reihenfolge (geordnete Teilmengen)

Wählt man aus *N* verschiedenen Objekten *r* zufällig aus ergeben sich

$$\frac{N!}{(N-r)!}$$

verschiedene Reihenfolgen von *r* Objekten.

Beispiel:

Wie viele Möglichkeiten der Medaillenvergabe gibt es bei einem 1000-Meter-Lauf mit 8 Läufern?

Gesucht sind alle möglichen Teilsequenzen von 3 Personen aus 8 (unter Berücksichtigung der Reihenfolge, d.h. 1, 2, 3 ist nicht gleich 1, 3, 2 oder 3, 1, 2 oder 2, 1, 3 oder 2, 3, 1 oder 3, 2, 1):

$$\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=8\cdot7\cdot6=336$$

Kombinatorik (5)

- Kombinationen -

Teilsequenzen ohne Reihenfolge (nicht geordnete Teilmengen)

Wählt man aus *N* verschiedenen Objekten *r* zufällig aus, ergeben sich für die *r* Objekte

$$\frac{N!}{(N-r)!\cdot r!} = \binom{N}{r}$$

(*lies: N über r*)

verschiedene Kombinationen.*)

Beispiel:
Wie viele Kombinationen von Siegerinnen gibt es bei einem 1000-Meter-Lauf mit 8 Läuferinnen?
Gesucht sind alle möglichen Gruppen von 3 Personen aus 8 (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge innerhalb der Gruppen, d.h. die 3! = 6 verschiedenen Möglichkeiten, 3 Objekte anzuordnen, werden als eine Kombination gewertet):

$$\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{336}{6} = 56$$

*) In R lässt sich dies mit der Funktion `choose(N,r)` berechnen, siehe: http://www.r-project.org/

Kombinatorik (6)

- Binomialkoeffizient -

$$\binom{N}{r} = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdot\ldots(N-r+1)}{r!}$$

N über *r* ist ein Binomialkoeffizient.*)

Beispiel:
Lotto 6 aus 49
Wie viele Möglichkeiten der Kombinationen von 6 Zahlen gibt es?

$$\binom{N}{r} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)!\cdot 6!} = \frac{49!}{43!\cdot 6!} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 13983816$$

*) Siehe http://www2.jura.uni-hamburg.de/instkrim/kriminologie/Mitarbeiter/Enzmann/Lehre/StatIIKrim/Binomialverteilung.pdf