

Binomialkoeffizienten und die Binomialverteilung

Was ist die Binomialverteilung und warum heißt sie *Binomialverteilung*? Dazu zunächst ein Rückgriff auf die Schulmathematik und den Binomialkoeffizienten.

Der Binomialkoeffizient

Definition: Wenn n eine positive ganze Zahl und x eine nicht negative ganze Zahl kleiner oder gleich n ist, stellt

$$\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{x}$ dar.

Hinweise: $\binom{n}{x}$ wird gelesen „ n über x “ und $n!$ wird gelesen „ n Fakultät“. $\binom{n}{x}$ stellt die Anzahl der möglichen Kombinationen von x aus n Objekten (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) dar. Des weiteren stellt $n!$ die Multiplikation der Zahlen $n, n-1, \dots$ bis 1 dar, also $5!$ ist gleich $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (siehe: *Kombinatorik.pdf*¹). In R lässt sich $\binom{n}{x}$ mit der Funktion `choose(n,x)` und $n!$ mit der Funktion `factorial(n)` berechnen².

Der Binomialkoeffizient spielt eine besondere Rolle bei der Erweiterung des *Binomials* $(a+b)^n$. Und zwar bedeutet $(a+b)^n$ die n -fache Multiplikation von $(a+b)$. Das Ausmultiplizieren (Erweitern) ergibt $n+1$ Terme (additive Elemente), wobei der erste Term $a^n \cdot b^0 (= a^n)$ und der letzte Term $a^0 \cdot b^n (= b^n)$ ist. So ist für das Binomial $(a+b)^5$ der Exponent $n=5$ und die Erweiterung hat die folgenden sechs Terme:

$$a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5.$$

Der Exponent des ersten Terms ist n , und in jedem nachfolgenden Term sinkt der Exponent von a um 1 und der Exponent von b steigt um 1. Lassen wir r von n bis 0 laufen und benutzen r für den Exponenten von a und $(n-r)$ für den Exponenten von b (also: $a^r b^{n-r}$), stellt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{r}$ (lies: n über r) den *Faktor* dar, mit dem wir jeden Term der Erweiterung des Binomials $(a+b)^n$ multiplizieren müssen.

¹ <http://www2.jura.uni-hamburg.de/instkrim/kriminologie/Mitarbeiter/Enzmann/Lehre/StatIIKrim/Kombinatorik.pdf>

² <http://www.r-project.org/>

Beispiel für $(a + b)^5$

Term- Nummer	$r =$ Exponent von a	$(n - r) =$ Exponent von b	$\binom{n}{r}$	Term
1	5	$5 - 5 = 0$	$\binom{5}{5} = \binom{5}{0} = 1$	$a^5 \cdot b^0 = a^5$
2	4	$5 - 4 = 1$	$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$	$a^4 \cdot b^1 = a^4 \cdot b$
3	3	$5 - 3 = 2$	$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$	$a^3 \cdot b^2$
4	2	$5 - 2 = 3$	$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$	$a^2 \cdot b^3$
5	1	$5 - 1 = 4$	$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$	$a^1 \cdot b^4 = a \cdot b^4$
6	0	$5 - 0 = 5$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$	$a^0 \cdot b^5 = b^5$

Das heißt, die Erweiterung des Binomials $(a + b)^5$ lässt sich schreiben als:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5.$$

Die Koeffizienten, mit denen die sechs Terme des Beispiels multipliziert werden müssen, sind also 1, 5, 10, 10, 5 und 1.

Der Binomialkoeffizient in seiner allgemeinen Form $\binom{n}{x}$ produziert also die *Koeffizienten* der Terme des Binomials $(a + b)^n$.

Die Binomialverteilung

Die Erweiterung des Binomials kann dazu dienen, die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl von „Erfolgen“ in einer Serie von Bernoulli-Experimenten zu berechnen. Die Verteilung dieser Wahrscheinlichkeiten wird als Binomialverteilung bezeichnet.

Zunächst zur Definition eines Bernoulli-Experiments:

Definition: Wiederholte identische Zufallsexperimente werden **Bernoulli-Experiment** genannt, wenn sie folgenden Bedingungen genügen:

- 1) Für jedes Zufallsexperiment gibt es zwei Ausgänge, allgemein als „Erfolg“ (s für „success“) und „Misserfolg“ (f für „failure“) bezeichnet.
- 2) Die Zufallsexperimente sind unabhängig voneinander.
- 3) Die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgs ist für jedes Zufallsexperiment gleich. Diese Wahrscheinlichkeit wird Erfolgswahrscheinlichkeit genannt und mit dem Buchstaben p bezeichnet.

Beispiel: Es sei bekannt, dass die Heilungschancen eines Medikaments 80 % sind. Angenommen, vier Patienten würde das Medikament verabreicht und die Heilung wird registriert.

- (a) Wie lässt sich dieser Prozess als Bernoulli-Experiment beschreiben?
- (b) Was sind die möglichen Ausgänge der vier Bernoulli-Experimente?
- (c) Wie groß sind die theoretischen Wahrscheinlichkeiten dieser vier möglichen Ausgänge?

zu a) Jeder Versuch besteht in der Verabreichung des Medikaments an einen der Patienten. Es gibt zwei mögliche Ausgänge des Versuchs: Heilung und Nichtheilung. Die Versuche sind unabhängig voneinander. Wenn wir die Heilung als Erfolg (s) bezeichnen, ist die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.80$.

zu b) Die möglichen Ausgänge der vier Bernoulli-Experimente s (Heilung) und f (Nichtheilung) sind:

$ssss$	$sfss$	$fsss$	$ffss$
$sssf$	$sfsf$	$fsff$	$ffsf$
$ssfs$	$sffs$	$fsfs$	$fffs$
$ssff$	$sfff$	$fsff$	$ffff$

zu c) Die Tabelle zeigt, dass es 16 mögliche Ergebnisse gibt. Formal: n^k mit $n =$ Anzahl der mögliche Ausgänge des Experiments und $k =$ Anzahl der Experimente: $2^4 = 16$. Die Ergebnisse sind allerdings nicht gleich wahrscheinlich. Für alle Experimente gilt: Die Erfolgswahrscheinlichkeit $P(s) = p = 0.80$. Dementsprechend ist die Misserfolgswahrscheinlichkeit $P(f) = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$.

Da die Experimente unabhängig voneinander sind, kann die spezielle Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten angewandt werden. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs $sssf$:

$$P(sssf) = P(s) \cdot P(s) \cdot P(s) \cdot P(f) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.1024$$

und die für $fsfs$ ist

$$P(fsfs) = P(s) \cdot P(f) \cdot P(s) \cdot P(f) = 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.0256.$$

Ähnliche Berechnungen ergeben die Wahrscheinlichkeiten aller 16 möglichen Ausgänge:

Ausgang	Wahrscheinlichkeit	
ssss	$0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.8^4 \cdot 0.2^0$	= 0.4096
sss <i>f</i>	$0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8^3 \cdot 0.2^1$	= 0.1024
ss <i>fs</i>	$0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8^3 \cdot 0.2^1$	= 0.1024
s <i>fss</i>	$0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.8^3 \cdot 0.2^1$	= 0.1024
<i>fsss</i>	$0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.8^3 \cdot 0.2^1$	= 0.1024
ss <i>ff</i>	$0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.8^2 \cdot 0.2^2$	= 0.0256
s <i>fsf</i>	$0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8^2 \cdot 0.2^2$	= 0.0256
<i>fssf</i>	$0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8^2 \cdot 0.2^2$	= 0.0256
s <i>ffs</i>	$0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8^2 \cdot 0.2^2$	= 0.0256
<i>fsfs</i>	$0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8^2 \cdot 0.2^2$	= 0.0256
<i>ffss</i>	$0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.8^2 \cdot 0.2^2$	= 0.0256
s <i>fff</i>	$0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.8^1 \cdot 0.2^3$	= 0.0064
<i>fsff</i>	$0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.8^1 \cdot 0.2^3$	= 0.0064
<i>ffsf</i>	$0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8^1 \cdot 0.2^3$	= 0.0064
<i>fffs</i>	$0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8^1 \cdot 0.2^3$	= 0.0064
<i>ffff</i>	$0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.8^0 \cdot 0.2^4$	= 0.0016

Die Möglichen Ausgänge des Experiments und ihre Wahrscheinlichkeiten lassen sich auch anhand eines Wahrscheinlichkeitsbaumes darstellen (zur Übung für die Leser).

Aus der obige Tabelle können Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Erfolge einer Serie von vier Bernoulli-Experimenten mit einer jeweiligen Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0.8$ bestimmt werden.

Definition: Die **Binomialverteilung** ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Erfolge in einer Serie von Bernoulli-Experimenten.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für obiges Bernoulli-Experiment ($n = 4, p = 0.8$) ergibt sich anhand der obigen Tabelle wie folgt:

Anzahl Heilungen x	Wahrscheinlichkeit P(x)
0	0.0016
1	0.0256
2	0.1536
3	0.4096
4	0.4096

Allgemein lässt sich die Anzahl der Ausgänge mit x Erfolgen mit Hilfe des Binomialkoeffizienten bestimmen:

Angenommen, n Bernoulli-Experimente werden durchgeführt. Dann ist die Anzahl der Ausgänge mit genau x Erfolgen gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{x}$. D. h., ein Ereignis mit genau x Erfolgen in n Experimenten besteht aus $\binom{n}{x}$ Ausgängen.

Die obigen Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ausgänge mit x Erfolgen sind gleich für jedes x . Daraus lässt sich mit Hilfe der speziellen Additionsregel für Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit für x erfolgreiche Ausgänge mit folgender Formel für die Binomialwahrscheinlichkeit bestimmen:

Angenommen, n Bernoulli-Experimente werden durchgeführt und die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgs für jeden Versuch beträgt p . X sei die Gesamtzahl der Erfolge in n Versuchen. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der diskreten Zufallsvariablen X mit folgender Formel gegeben:

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Die Zufallsvariable X wird als binomiale Zufallsvariable bezeichnet und hat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Parametern n und p .

Die Binomialverteilung ist eine diskrete Verteilung. Die folgenden Abbildungen zeigen Binomialverteilungen mit unterschiedlichen Werten der Parameter n und p .³ Je weiter p von 0.5 abweicht, desto unsymmetrischer ist die Verteilung, je größer n , desto eher nähert sich die die Form der Verteilung einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $n \cdot p$ an.

Die folgende Prozedur ist hilfreich, um Binomialwahrscheinlichkeiten bzw. die Werte der Binomialverteilung zu berechnen:

Annahmen:

- 1) n identische Zufallsexperimente werden durchgeführt
- 2) Es gibt zwei mögliche Ergebnisse (Erfolg und Misserfolg) für jedes Experiment.
- 3) Die Experimente sind voneinander unabhängig.
- 4) Die Erfolgswahrscheinlichkeit p ist für alle Experimente konstant.

Schritt 1) Definiere einen Erfolg

Schritt 2) Bestimme p , die Erfolgswahrscheinlichkeit

Schritt 3) Bestimme n , die Anzahl der Experimente (Durchgänge, Versuche)

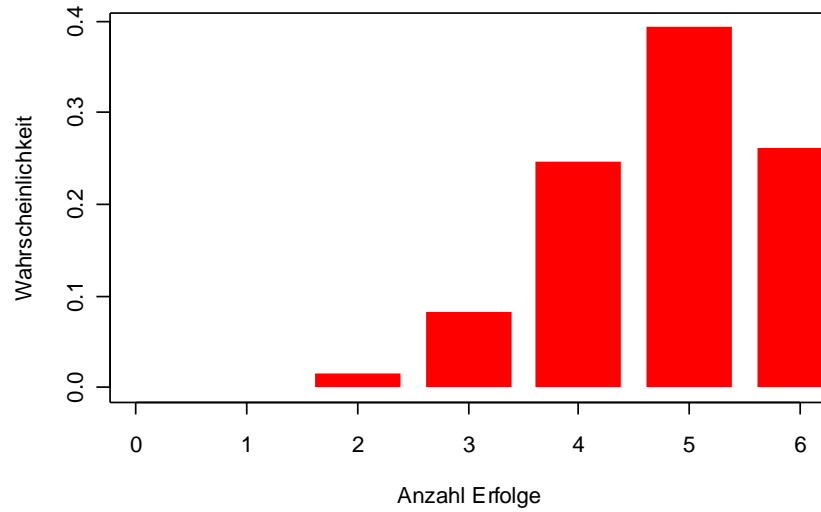
Schritt 4) Die Formel für die Binomialwahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge x ist

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

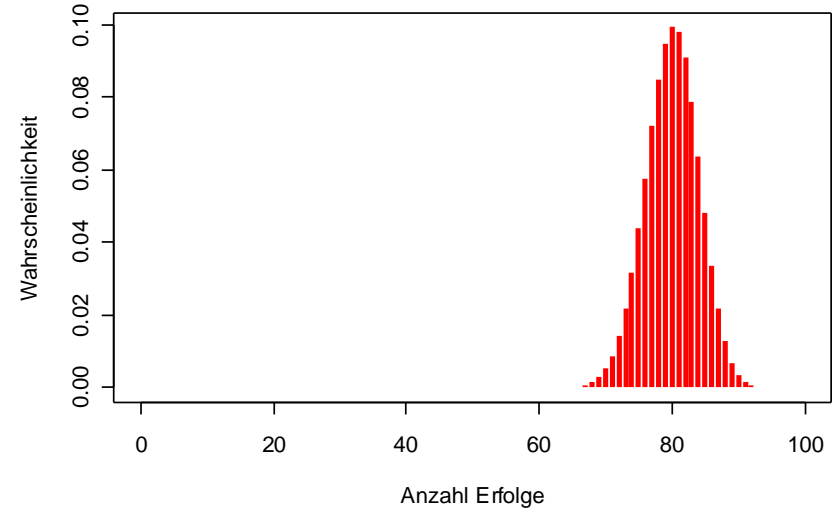
³ R-Syntax zur Erzeugung der Grafiken findet sich unter:

<http://www2.jura.uni-hamburg.de/instkrim/kriminologie/Mitarbeiter/Enzmann/Lehre/StatIKrim/binomplot.r>

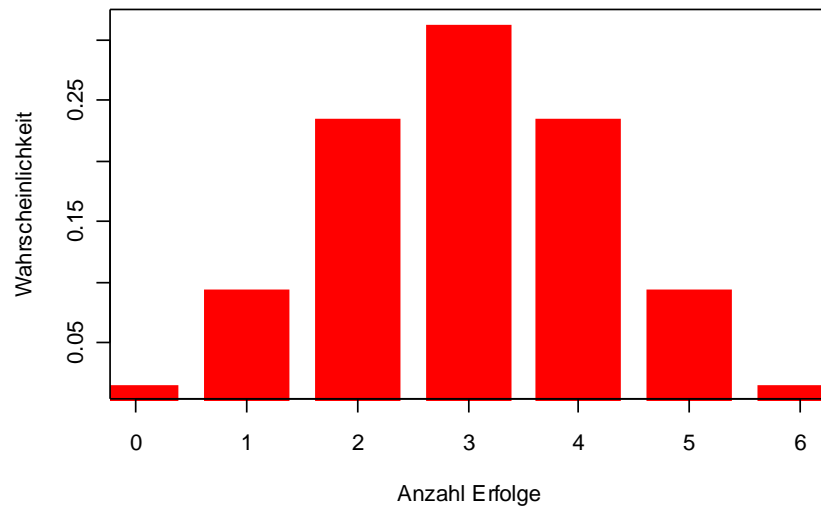
Binomialverteilung mit $n=6$ und $p=0.8$



Binomialverteilung mit $n=100$ und $p=0.8$



Binomialverteilung mit $n=6$ und $p=0.5$



Binomialverteilung mit $n=100$ und $p=0.5$

